

МЧС России
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский университет
Государственной противопожарной службы
Министерства Российской Федерации по делам
гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации
последствий стихийных бедствий»

Кафедра прикладной математики и информационных технологий

Комбинаторика и теория вероятностей

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2023

УДК 519.2

ББК 22.1

K63

Комбинаторика и теория вероятностей. Учебное пособие. /

Т.Н. Антошина, А.А. Кабанов, Л.Д. Пономарев, И.В. Саушкина. Под ред. Т.Н. Антошиной, А.А. Кабанова, А.В. Матвеева. – СПб.: ФГБОУ ВО СПбГУПС МЧС России, 2023. – 36 с.

ISBN 978-5-907724-35-8

В брошюре кратко рассматриваются актуальные вопросы математики, объемом около одной – двух страниц на вопрос. В него вошли статьи студентов 1 курса факультета обеспечения безопасности жизнедеятельности Санкт-Петербургского университета ГПС МЧС России набора 2022 года, обучающихся 37.05.02 «Психология служебной деятельности». Вступительная статья написана А.А. Кабановым. Заключительная статья написана Т.Н. Антошиной. Замечания и предложения просим присылать по *e-mail: akabanov@inbox.ru*.

Редакционная коллегия:

Т.Н. Антошина, А.А. Кабанов, А.В. Матвеев

ISBN 978-5-907724-35-8

©Санкт-Петербургский университет
ГПСМЧС России, 2023

© Авторский коллектив, 2023

© Кабанов А.А. компьютерная верстка,
2023

© Кабанов А.А., Жукова А.А., Халилова
М., дизайн обложки, 2023

*А математику уже затем
учить следует, что она ум в
порядок приводит*

М.В. Ломоносов

Комбинаторика и теория вероятностей для психологов

*А.А. Кабанов, доцент кафедры
прикладной математики и информационных технологий,
кандидат юридических наук, доцент*

Данное пособие представляет собой в основном компилятивное изложение ответов на ряд вопросов первого семестра по предмету «Математика и математическая статистика», изучаемого студентами по специальности 37.05.02 Психология служебной деятельности, специализация Психология безопасности. Здесь рассмотрены вопросы математики: теории множеств, комбинаторики и теории вероятностей. Вопросы математической статистики, включённые в программу учебной дисциплины «Математика и математическая статистика» не рассмотрены. Ответы на первые 16 вопросов сформулировала студентка 1 курса Саушкина Ирина Александровна, на 17-33 вопросы – студент 1 курса Пономарев Лев Денисович. Общее редактирование сборника осуществлено редакционной коллегией, вступительная статья, компьютерная верстка А.А. Кабановым, заключительная статья написана Т.Н. Антошиной.

Учебников по математике и различным её разделам имеется большое количество. Однако актуальность математического образования для самых разных специальностей по-прежнему велика. Большинство математических книг требует значительного времени и терпения для их изучения.

Систематизация математических знаний продолжается. Данная брошюра совершает ещё один шаг в этом направлении. Особенно полезен такой вариант учебного пособия для студентов первого курса. Привычка к школьному способу получения знаний посредством школьных уроков играет плохую роль в вузе. Обучение в высших учебных заведениях обязательно предполагает большой объём самостоятельной работы в приобретении знаний, умений и навыков, выработки компетенций. Многие изучаемые вопросы решены математиками сотни и даже тысячи лет назад. Их современное изложение представляет собой определённую трудность. Попытки молодёжи самостоятельно понятным языком объяснить математические понятия весьма полезны как для самих авторов, так и для многих молодых психологов, будущих читателей пособия.

1. Понятие случайного события, виды событий. Пространство элементарных событий. Примеры

Теория вероятностей – это раздел математики, который изучает закономерности в случайных событиях.

Под *опытом* понимается некоторая воспроизводимая совокупность условий, в которой наблюдается то или иное явление. Опыт может представлять как одно испытание, так и серию испытаний.

Случайное явление – это явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта протекает по-разному.

Случайное событие – всякий факт, который в результате опыта со случайным исходом может произойти или не произойти.

Виды случайных событий:

А. *Несовместимые*. К ним относятся такие, которые не могут происходить в одном испытании или эксперименте.

Б. *События совместимые*. К ним относятся такие, которые могут протекать одновременно.

В. *Полная группа событий*. В неё входят такие события, одно из которых проявляется при эксперименте.

Г. *События равновозможные* – вероятность свершения одного события равна шансам свершения другого события и т.д. Так шансы на большее количество «решек» равны шансам выпадения большего количества «орлов».

Классической вероятностью появления некоторого события называется отношение числа случаев, благоприятствующих появлению этого события, к общему числу случаев равновозможных, несовместных, составляющих полную группу событий в данном опыте:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

где $P(A)$ – вероятность появления события A ;

m – число случаев, благоприятствующих событию A ;

n – общее число случаев.

Пространство элементарных событий Ω – это множество, содержащее все возможные результаты опыта, которые взаимно исключают друг друга. Элементами этого множества являются *элементарные события*, каждое из которых – и только одно – происходит в результате опыта.

Элементарные события обладают свойствами несовместности и равновозможности.

Пространство элементарных событий обладает свойством *полноты*.

Например:

1) Пространство элементарных событий при бросании кубика

$$\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$$

2) Пространство элементарных событий при бросании двух монет

$$\Omega = \begin{Bmatrix} 00 & 01 \\ 10 & 11 \end{Bmatrix}$$

где на первом месте – результат бросания 1-й монеты, на втором – 2-й монеты.

«0» – выпадение решки; «1» – выпадение орла.

Событие А – это подмножество пространства элементарных событий $A \subseteq \Omega$.

Событие А произошло, если в опыте произошло одно из элементарных событий, входящих в множество *A*.

Например:

Пусть при бросании кубика происходит событие $A = \{1;3;5\}$ – т.е. выпадение нечётного числа. Событие *A* будет происходить каждый раз при наблюдении элементарных событий 1 или 3 или 5.

2. Совместные и несовместные события. Полная группа событий для данного испытания. Противоположные события. Примеры

Два события называются *совместными*, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Два события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появления другого в одном и том же испытании.

Событие, противоположное данному, обычно обозначается той же латинской буквой с чёрточкой наверху:

A_0 – в результате броска монеты выпадет орёл;

$\bar{A}_0$ – в результате этого же броска выпадет решка.

В отдельно взятом испытании появление орла исключает появление решки (и наоборот), поэтому данные события и называются несовместными.

Противоположные события легко формулируются из соображений элементарной логики:

B_5 – в результате броска игрального кубика выпадет 5 очков;

$\bar{B}_5$ – в результате этого же броска выпадет число очков, отличное от пяти.

Либо 5, либо не 5, т.е. данные события *несовместны и противоположны*.

Аналогично:

C_T – из колоды будет извлечена карта трёфовой масти, либо:

$\bar{C}_T$ – извлечена пика, черва или бубна.

Множество несовместных событий образуют полную группу, если в результате отдельно взятого испытания **обязательно появится одно и только одно из этих событий**. Очевидно, что любая пара противоположных событий, например, B_5 и $\bar{B}_5$ (выпадение / не выпадение «пятёрки») образует полную группу. Но, разумеется, полную группу могут образовывать не только противоположные события:

B_1 – в результате броска игрального кубика выпадет 1 очко;

B_2 – ... 2 очка;

B_3 – ... 3 очка;

B_4 – ... 4 очка;

B_5 – ... 5 очков;

B_6 – ... 6 очков.

События B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 , и B_6 *несовместны* (поскольку появление какой-либо грани исключает одновременное появление других) и образуют *полную группу* (так как в результате испытания обязательно появится одно из этих шести событий).

События называются *совместными*, если в отдельно взятом испытании появление одного из них *не исключает* появления другого.

Например:

C_T – из колоды карт будет извлечена трёфа;

D_7 – из колоды карт будет извлечена семёрка.

Данные события совместны, т.к. при извлечении семёрки трёф одновременно имеют место оба события.

3. Основные операции над случайными событиями. Примеры

Основные операции над случайными событиями включает *объединение* (сложение), *пересечение* (умножение) и *дополнение*.

Пусть имеется несколько случайных событий. Тогда из них можно строить новые случайные события, используя логические связки

«ИЛИ» и «И», которым в теории множеств соответствуют операции объединения и пересечения.

Пусть проводится стрельба двух стрелков (каждый делает по одному выстрелу). Событие A означает, что попал в цель первый стрелок, событие B – попал в цель второй стрелок. Введём в рассмотрение ещё два события:

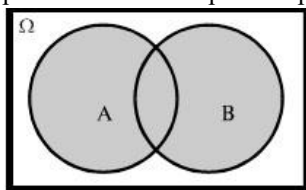
C – попал в цель хотя бы один стрелок;

D – попали в цель оба стрелка.

Событие C наступит тогда, когда произойдет либо одно из событий A или B , либо оба этих события вместе. Событие D произойдет только тогда, когда в одном испытании наступят они оба: и событие A и событие B .

Суммой событий A и B называется такое событие $C = A + B$, которое происходит тогда, когда произошло по крайней мере одно из событий: A или B .

Сумма событий состоит из всех возможных исходов событий A и B , поэтому сумма случайных событий геометрически соответствует объединению множеств, которые определяют события A и B соответственно. Таким образом, для *суммы* (или *объединения*) случайных событий A и B имеет место геометрическая интерпретация, где суммой $C=A+B$ является заштрихованная часть рассматриваемой плоскости Ω :



а) Заштрихованно

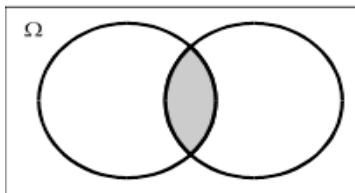
Особое значение для решения примеров имеет следующий очевидный факт: Сумма двух противоположных событий для данного испытания является достоверным событием, т.е.

$$A + \bar{A} = U.$$

Сумма событий может состоять не из двух, а из большего числа слагаемых. Тогда *суммой конечного числа событий* $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется событие, которое происходит тогда, когда произошло хотя бы одно из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$.

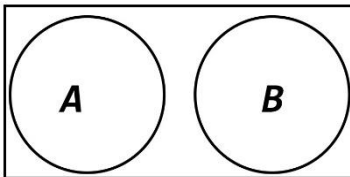
Произведением событий A и B называется такое событие $D = A \cdot B$, которое происходит тогда и только тогда, когда произошло и событие A и событие B .

Для совместных событий A и B можно дать следующую геометрическую интерпретацию *произведения* событий, как *пересечения* двух множеств, соответствующих событиям A и B :



б) заштриховано

Ясно, что для несовместных событий A и B , их произведение есть пустое множество.



в) нет пересечения.

Произведение противоположных событий также является пустым множеством, т.е.

$$A \cdot \bar{A} = \emptyset.$$

Произведение событий, также как и сумма событий может состоять не из двух, а из любого конечного числа сомножителей.

4. Статистическое определение вероятности случайного события. Основные свойства вероятности события

Относительной частотой случайного события называется отношение m числа испытаний, в которых это событие появилось, к общему числу n проведённых испытаний, и обозначается:

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

Между относительной частотой и вероятностью событий A есть определённая связь: если каким-то образом установлено, что вероятность случайного события равняется числу $P(P(A)=P)$, тогда при больших количествах испытаний и неизменных условиях частота события A приблизительно равняется вероятности, то есть:

$$W(A) \approx P(A)$$

Для подтверждения этого равенства подбросим n раз монеты. В данном случае «герб» появлялся m раз, m/n – относительная частота.

Вероятность события A имеет свойства:

1. Неотрицательность: $P(A) \geq 0$.
2. Нормировка: $P(\text{произвольное событие}) = 1$.
3. Аддитивность: $P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B)$ при условии, что события A и B несовместны.
4. Умножение вероятностей: $P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B)$ при условии, что события A и B независимы.
5. Дополнение: $P(\text{не } A) = 1 - P(A)$.

Эти свойства служат основой для вычисления вероятностей различных событий в теории вероятностей.

5. Классическая формула определения вероятности

Вероятностью события A в некотором испытании называют отношение:

$P(A) = m/n$, где n – общее число всех равновозможных, элементарных исходов этого испытания, а m – количество элементарных исходов, благоприятствующих событию A .

Свойства вероятности:

Вероятность достоверного события равна единице.

Вероятность невозможного события равна нулю.

Вероятность случайного события есть положительное число, заключённое между нулём и единицей.

Таким образом, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству $0 \leq P(A) \leq 1$.

Пример 1. В пакете 15 конфет: 5 с молочным шоколадом и 10 – с горьким. Какова вероятность вынуть из пакета конфету с белым шоколадом?

Так как в пакете нет конфет с белым шоколадом, то $m = 0$, $n = 15$. Следовательно, искомая вероятность равна нулю:

$$P = 0/15 = 0$$

Ответ: 0.

Пример 2. Из колоды в 36 карт вынули одну карту. Какова вероятность появления карты червовой масти?

Количество элементарных исходов, то есть количество карт равно 36 (***n***). Число случаев, благоприятствующих появлению карты червовой масти (***A***) равно 9 (***m***).

Следовательно:

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Ответ: 0.25.

6. Комбинаторика и её основные правила

Комбинаторика – раздел математики, который изучает задачи выбора и расположения элементов из некоторого основного множества в соответствии с заданными правилами. Формулы и принципы комбинаторики используются в теории вероятностей для подсчёта вероятности случайных событий и, соответственно, получения законов распределения случайных величин. Это, в свою очередь, позволяет исследовать закономерности массовых случайных явлений, что является весьма важным для правильного понимания статистических закономерностей, проявляющихся в природе и технике.

Правила сложения и умножения в комбинаторике

Правило суммы. Если два действия ***A*** и ***B*** взаимно исключают друг друга, причём действие ***A*** можно выполнить ***m*** способами, а ***B*** – ***n*** способами, то выполнить одно любое из этих действий (либо ***A***, либо ***B***) можно ***n + m*** способами.

Пример 1

В классе учится 16 мальчиков и 10 девочек. Сколькими способами можно назначить одного дежурного?

Дежурным можно назначить либо мальчика, либо девочку, т.е. дежурным может быть любой из 16 мальчиков, либо любая из 10 девочек. По правилу суммы получаем, что одного дежурного можно назначить $16+10=26$ способами.

Правило произведения. Пусть требуется выполнить последовательно ***k*** действий. Если первое действие можно выполнить ***n*₁** способами, второе действие ***n*₂** способами, третье – ***n*₃** способами и так до ***k***-го действия, которое можно выполнить ***n*_k** способами, то все ***k*** действий вместе могут быть выполнены: $N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$.

7. Основные элементы комбинаторики и их число

Сочетания без повторений. Классической задачей комбинаторики является задача о числе сочетаний без повторений, содержание которой можно выразить вопросом: сколькими способами можно выбрать m из n различных предметов?

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Сочетания с повторениями из элементов k типов по m элементов (m и k могут быть в любых соотношениях) называются все такие последовательности m элементов, принадлежащих исходным типам, которые отличаются друг от друга составом элементов.

$$\overline{C}_k^m = \frac{(k+m-1)!}{m!(k-1)!}$$

Размещения без повторений. Классической задачей комбинаторики является задача о числе размещений без повторений, содержание которой можно выразить вопросом: сколькими способами можно выбрать и разместить по m различным местам m из n различных предметов?

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Размещения с повторениями. Также, классической задачей комбинаторики является задача о числе размещений с повторениями, содержание которой можно выразить вопросом: сколькими способами можно выбрать и разместить по m различным местам m из n предметов, среди которых есть одинаковые?

$$\overline{A}_n^m = n^m$$

Перестановки без повторений. Классической задачей комбинаторики является задача о числе перестановок без повторения, содержание которой можно выразить вопросом: сколькими способами можно разместить n различных предметов на n различных местах?

$$P_n = n!$$

Перестановки с повторениями. Если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т.д. (т.е. $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$) то число перестановок с повторениями вычисляется по формуле:

$$\overline{P}_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

8. Теорема сложения вероятностей и её применение

Суммой двух совместных событий A и B называется событие C , состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A или B . Аналогично суммой нескольких совместных событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих нескольких событий.

Суммой двух несовместных событий A и B называется событие C , состоящее в наступлении или события A , или события B . Аналогично суммой нескольких несовместных событий называется событие, состоящее в наступлении какого-либо одного из этих событий.

Справедлива теорема сложения вероятностей несовместных событий: *вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий*, т.е. $P(A+B) = P(A)+P(B)$ Эту теорему можно распространить на любое конечное число несовместных событий. Из данной теоремы следует, что сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице; сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т.е. $P(A) + P(\bar{A})=1$.

Пример 1. В ящике находятся 2 белых, 3 красных и 5 синих шара. Шары перемешивают и наугад извлекают один. Какова вероятность того, что шар окажется цветным?

Решение. Обозначим события:

$A = \{\text{извлечён цветной шар}\};$

$B = \{\text{извлечён белый шар}\};$

$C = \{\text{извлечён красный шар}\};$

$D = \{\text{извлечён синий шар}\}.$

Тогда $A=C+D$. Так как события C, D несовместны, то воспользуемся теоремой сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(A) = P(C + D) = P(C) + P(D) = \frac{3}{10} + \frac{5}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

9. Понятие условной вероятности события. Зависимые и независимые события

Условная вероятность события – это вероятность наступления данного события при условии, что другое событие уже произошло. Она обозначается $P(A|B)$, где A и B – два события, а вертикальная черта $|$ указывает на условие.

Формула условной вероятности: $P(A|B)=P(A \cap B)/P(B)$,

где $P(A \cap B)$ – вероятность наступления обоих событий A и B , а $P(B)$ – вероятность наступления события B .

Например, если A – событие «выпадение герба при подбрасывании монеты», а B – событие «монета выпала на ребро», то условная вероятность $P(A|B)$ будет равняться нулю, так как если монета лежит на ребре, она не может показать герб или орла.

Два события называют *независимыми*, если вероятность появления одного из них не зависит от того, произойдет ли другое событие.

Например, опыт состоит в бросании двух монет.

Пусть A и B – события, состоящие в том, что герб появится соответственно на первой и второй монете. В данном случае вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет. Следовательно, событие A независимо от события B .

Несколько событий называют *попарно независимыми*, если каждые два из них независимы. Два события называют *зависимыми*, если вероятность появления одного из них меняется в зависимости от того, произойдет другое событие или нет. Зависимость и независимость событий всегда взаимны, т.е. если событие B не зависит от события A , то и событие A не зависит от события B .

10. Теорема умножения вероятностей и её применение. Следствия

Теорема умножения. Вероятность произведения двух случайных событий равна произведению вероятности одного из этих событий, на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие произошло

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

Следствие 1. Если событие A не зависит от события B , то и событие B не зависит от события A , т. е. понятия зависимости и независимости двух событий являются взаимными. Из доказанного следствия следует следующее определение независимых событий.

Определение. Два события A и B называются *независимыми*, если появление или непоявление одного из них не изменяет вероятности наступления другого

$$P_B(A) = P_{\bar{B}}(A) = P(A)$$

В противном случае события A и B называются *зависимыми*.

Следствие 2. Если A и B независимы, то независимы и события $(\bar{A} \text{ и } B)$, $(A \text{ и } \bar{B})$, $(\bar{A} \text{ и } \bar{B})$

Следствие 3. Если события A и B независимы, то вероятность произведения этих событий равна произведению их вероятностей

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

11. Формула полной вероятности

Пусть событие A ещё не произошло, но вскоре должно произойти. Событие A может протекать в различных условиях, относительно характера которых сделано n гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу несовместных событий. Вероятности гипотез известны. Тогда вероятность события A равна сумме произведений вероятности каждой гипотезы на вероятность события при этой гипотезе:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i) \quad - \text{ (Формула полной вероятности)}$$

Доказательство:

По условию теоремы гипотезы $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуют полную группу несовместных событий, следовательно, событие A может произойти с одной и только с одной гипотезой:

$$A = H_1A + H_2A + \dots + H_nA = \sum_{i=1}^n H_i A$$

Т.к. гипотезы несовместны, то и комбинации $H_1 \cdot A, H_2 \cdot A, \dots, H_n \cdot A$ – несовместны. Следовательно:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1A + H_2A + \dots + H_nA) = \\ &= P(H_1A) + P(H_2A) + \dots + P(H_nA) = \\ &= \sum_{i=1}^n P(H_i A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i) \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

12. Априорные и апостериорные вероятности. Формулы Байеса

Теорема Байеса – одна из главных теорем элементарной теории вероятности. Она позволяет определить вероятность будущего события по прошлому событию, которое с ним взаимосвязано. Иными словами, помогает выяснить причины и следствия какого-то действия. Формулировка теоремы имеет математический вид:

$$P(A|B) = P(B|A) \cdot P(A) / P(B),$$

A – гипотеза;

B – событие;

$P(A)$ – априорная вероятность гипотезы A ;

$P(A|B)$ – вероятность гипотезы A при наступлении события B (апостериорная вероятность);

$P(B|A)$ – вероятность наступления события B при истинности гипотезы A ;

$P(B)$ – полная вероятность наступления события B .

В данном случае гипотеза – это предполагаемая причина события. Априорная вероятность – это вероятность правильности гипотезы до события **B**. Здесь отвечают на вопрос, возможна ли данная причина в принципе. Апостериорная вероятность – вероятность правильности гипотезы после наступления события **B**. То есть может ли данная гипотеза быть причиной данного события.

13. Определение испытаний Бернулли. Пример

Схема Бернулли – это последовательность независимых испытаний, в каждом из которых возможны только два исхода – «успех» и «неудача». При этом вероятность успеха в каждом испытании постоянна и равна $p \in (0; 1)$. Вероятность неудачи в каждом испытании $q = 1 - p$.

Например:

Стрелок попадает в мишень с вероятностью $p = 0,8$.

Найдите вероятности для события **X** – количества попаданий в серии из 4 выстрелов.

$X = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ – возможные значения **X**.

$q = 1 - p = 0,2$ – вероятность неудачи.

Полное пространство элементарных событий («+» – попал, «-» – не попал).

$$P(X = 0) = q \cdot q \cdot q \cdot q = q^4 = C_4^0 q^4$$

$$P(X = 1) = 4pq^3 = C_4^1 pq^3$$

$$P(X = 2) = 6p^2q^2 = C_4^2 p^2q^2$$

$$P(X = 3) = 4p^3q = C_4^3 p^3q$$

$$P(X = 4) = p^4 = C_4^4 p^4$$

Мы видим, что для вероятностей в выборках не важен порядок успехов и неудач, т.е. выборки с точки зрения подсчёта вероятности являются неупорядоченными. Соответствующее количество попыток будет определяться сочетаниями без повторений из **n** по **k**:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} \text{ – или биномиальными коэффициентами}$$

Количество попаданий, X	0	1	2	3	4
Вероятность, P_x	0.0016	0.256	0.1536	0.4096	0.4096

14. Локальная теорема Муавра-Лапласа

Схема повторных независимых испытаний Бернулли позволяет вычислить вероятность того, что событие появится в испытаниях ровно n раз. При её выводе предполагается, что вероятность появления события в каждом испытании постоянна. Легко видеть, что пользоваться формулой Бернулли при больших значениях достаточно трудно, так как формула требует выполнения действий над громадными числами.

Локальная теорема Муавра – Лапласа даёт асимптотическую формулу, которая позволяет приближённо найти вероятность появления события ровно k раз в n испытаниях, если число испытаний достаточно велико.

Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(K)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно n раз, приближённо равна (тем точнее, чем больше n) значению функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} * \varphi(x)$$

При:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

Таким образом, вероятность того, что событие появится в независимых испытаниях ровно n раз, приближённо равна:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$$

Где:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

15. Теорема Пуассона

Теорема. Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых случается событие a , с малой вероятностью p . Тогда, если число испытаний неограниченно возрастает, а p стремится к нулю и причём $n \cdot p = a$ величина постоянная, то вероятность k находится по формуле

$$P_n(k) \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

Доказательство: По формуле Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $q=1-p$. Отсюда

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k q^{n-k} = \frac{(n-k+1) \cdot (n-k+2) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}{k!} \cdot (1-p)^{n-k} p^k$$

По условию $a = n \cdot p \Rightarrow p = \frac{a}{n}$. Подставляя, получим

$$\begin{aligned} P_n(k) &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{a^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-k} = \\ &= \frac{a^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \left[\left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-\frac{n}{a}}\right]^a \cdot \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-k} \end{aligned}$$

Перейдём к пределу при $n \rightarrow \infty$, т.е.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k) &= \frac{a^k}{k!} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \\ &\times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-k} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-\frac{n}{a}}\right]^a = \frac{a^k}{k!} e^{-a} \\ P_n(k) &\approx \frac{a^k}{k!} e^{-a} \quad \text{— формула Пуассона.} \end{aligned}$$

16. Интегральная теорема Лапласа

Вероятность P , что возникнет событие A , для каждого эксперимента по порядку обладает стабильным значением, и $p \neq 0$ и $p \neq 1$, тогда вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что явление A наступит от k_1 до k_2 раз в n опытах, равна:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{x_2}^{x_1} e^{-z^2/2} dz = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

В смысле данной формулировки,

$$x_1 = \frac{k_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}, x_2 = \frac{k_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

Следует отметить, что

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int e^{-z^2/2} dz$$

можно определить с помощью специальных табличных схем.

$\Phi(-x) = -\Phi(x) - \Phi$ является нечётной функцией.

Рассматриваемая функция обладает следующими основными свойствами:

1. функция является нечётной;
2. если аргумент больше, чем 5, то значение функции будет 0,5.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,50	0,1915	1,00	0,3413	1,50	0,4332	2,00	0,4772	3,00	0,49865
0,01	0,0040	0,51	0,1950	1,01	0,3438	1,51	0,4345	2,01	0,4783	3,20	0,49931
0,02	0,0080	0,52	0,1985	1,02	0,3461	1,52	0,4357	2,04	0,4793	3,40	0,49966
0,03	0,0120	0,53	0,2019	1,03	0,3485	1,53	0,4370	2,06	0,4803	3,60	0,499841
0,04	0,0160	0,54	0,2054	1,04	0,3508	1,54	0,4382	2,08	0,4812	3,80	0,499928
0,05	0,0199	0,55	0,2088	1,05	0,3531	1,55	0,4394	2,10	0,4821	4,00	0,499968
0,06	0,0239	0,56	0,2123	1,06	0,3554	1,56	0,4406	2,12	0,4830	4,50	0,499997
0,07	0,0279	0,57	0,2157	1,07	0,3577	1,57	0,4418	2,14	0,4838	5,00	0,499997
0,08	0,0319	0,58	0,2190	1,08	0,3599	1,58	0,4429	2,16	0,4846		
0,09	0,0359	0,59	0,2224	1,09	0,3621	1,59	0,4441	2,18	0,4854		
0,10	0,0398	0,60	0,2257	1,10	0,3643	1,60	0,4452	2,20	0,4861		
0,11	0,0438	0,61	0,2291	1,11	0,3665	1,61	0,4463	2,22	0,4868		
0,12	0,0478	0,62	0,2324	1,12	0,3686	1,62	0,4474	2,24	0,4875		
0,13	0,0517	0,63	0,2357	1,13	0,3708	1,63	0,4484	2,26	0,4881		
0,14	0,0557	0,64	0,2389	1,14	0,3729	1,64	0,4495	2,28	0,4887		
0,15	0,0596	0,65	0,2422	1,15	0,3749	1,65	0,4505	2,30	0,4893		
0,16	0,0636	0,66	0,2454	1,16	0,3770	1,66	0,4515	2,32	0,4898		
0,17	0,0675	0,67	0,2486	1,17	0,3790	1,67	0,4525	2,34	0,4904		
0,18	0,0714	0,68	0,2517	1,18	0,3810	1,68	0,4535	2,36	0,4909		
0,19	0,0753	0,69	0,2549	1,19	0,3830	1,69	0,4545	2,38	0,4913		
0,20	0,0793	0,70	0,2580	1,20	0,3849	1,70	0,4554	2,40	0,4918		
0,21	0,0832	0,71	0,2611	1,21	0,3869	1,71	0,4564	2,42	0,4922		

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,22	0,0871	0,72	0,2642	1,22	0,3883	1,72	0,4573	2,44	0,4927		
0,23	0,0910	0,73	0,2673	1,23	0,3907	1,73	0,4582	2,46	0,4931		
0,24	0,0948	0,74	0,2703	1,24	0,3925	1,74	0,4591	2,48	0,4934		
0,25	0,0987	0,75	0,2734	1,25	0,3944	1,75	0,4599	2,50	0,4938		
0,26	0,1026	0,76	0,2764	1,26	0,3962	1,76	0,4608	2,52	0,4941		
0,27	0,1064	0,77	0,2794	1,27	0,3980	1,77	0,4616	2,54	0,4945		
0,28	0,1103	0,78	0,2823	1,28	0,3997	1,78	0,4625	2,56	0,4948		
0,29	0,1141	0,79	0,2852	1,29	0,4015	1,79	0,4633	2,58	0,4951		
0,30	0,1179	0,80	0,2881	1,30	0,4032	1,80	0,4641	2,60	0,4953		
0,31	0,1217	0,81	0,2910	1,31	0,4049	1,81	0,4649	2,62	0,4956		
0,32	0,1255	0,82	0,2939	1,32	0,4066	1,82	0,4656	2,64	0,4959		
0,33	0,1293	0,83	0,2967	1,33	0,4082	1,83	0,4664	2,66	0,4961		
0,34	0,1331	0,84	0,2995	1,34	0,4099	1,84	0,4671	2,68	0,4963		
0,35	0,1368	0,85	0,3023	1,35	0,4115	1,85	0,4678	2,70	0,4965		
0,36	0,1406	0,86	0,3051	1,36	0,4131	1,86	0,4686	2,72	0,4967		
0,37	0,1443	0,87	0,3078	1,37	0,4147	1,87	0,4693	2,74	0,4969		
0,38	0,1480	0,88	0,3106	1,38	0,4162	1,88	0,4699	2,76	0,4971		
0,39	0,1517	0,89	0,3133	1,39	0,4177	1,89	0,4706	2,78	0,4973		
0,40	0,1554	0,90	0,3159	1,40	0,4192	1,90	0,4713	2,80	0,4974		
0,41	0,1591	0,91	0,3186	1,41	0,4207	1,91	0,4719	2,82	0,4976		
0,42	0,1628	0,92	0,3212	1,42	0,4222	1,92	0,4726	2,84	0,4977		
0,43	0,1664	0,93	0,3238	1,43	0,4236	1,93	0,4732	2,86	0,4979		
0,44	0,1700	0,94	0,3264	1,44	0,4251	1,94	0,4738	2,88	0,4980		
0,45	0,1736	0,95	0,3289	1,45	0,4265	1,95	0,4744	2,90	0,4981		
0,46	0,1772	0,96	0,3315	1,46	0,4279	1,96	0,4750	2,92	0,4982		
0,47	0,1808	0,97	0,3340	1,47	0,4292	1,97	0,4756	2,94	0,4984		
0,48	0,1844	0,98	0,3365	1,48	0,4306	1,98	0,4761	2,96	0,4985		
0,49	0,1879	0,99	0,3389	1,49	0,4319	1,99	0,4767	2,98	0,4986		

17. Понятие случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Примеры

Случайной величиной называют величину, которая в результате испытания принимает одно из возможных для неё значений.

Примерами случайных величин являются:

Число очков на игральном кубике, количество клиентов за день и т.д.

Дискретной случайной величиной называется случайная величина, которая в результате испытания принимает значения, поддающиеся исчислению (конечные) и между возможными значениями есть промежутки без других возможных значений.

Примеры:

При броске игральной кости могут выпасть значения 1, 2, 3, 4, 5, 6 и заранее определить, какое значение выпадет нельзя (по крайней мере если бросающий не мухлюет, хотя даже так результат не гарантирован).

Стрелок делает выстрелы по мишени и попадает или промахивается.

Непрерывной случайной величиной называют случайную величину, множество значений которой заполняет некий промежуток.

Примеры: температура больного в фиксированное время суток, масса наугад выбранной таблетки некоторого препарата, рост наугад выбранного студента и т.д.

18. Закон распределения случайной величины. Ряд и многоугольник распределения дискретной случайной величины

Законом распределения случайной величины называется любое правило, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Ряд распределения – таблица, в которой представлены возможные значения случайной величины и вероятности, с которыми случайная величина принимает то или иное значение:

$X :$	x_1	x_2	x_3	...	x_n
	p_1	p_2	p_3	...	p_n

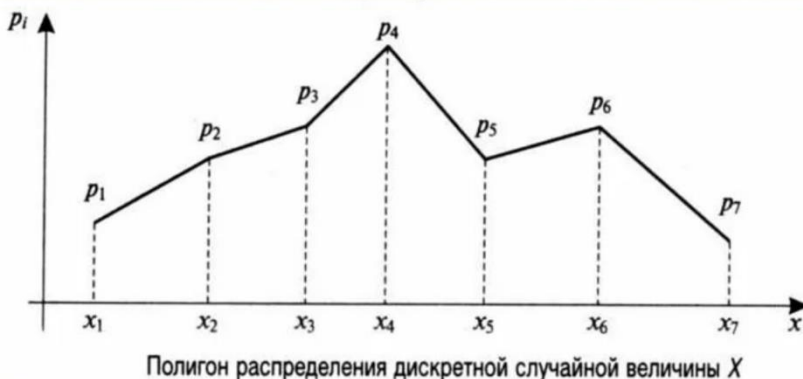
Так как в испытании случайная величина принимает только одно возможное значение, то события $X=x_1, X=x_2, \dots, X=x_n$ образуют полную группу несовместных событий, т.е. сумма их вероятностей равна 1:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Закон распределения случайной величины (дискретной или непрерывной) можно задать при помощи функции распределения

$$F(x)=P(X<x)$$

Другой способ представления дискретной случайной величины – графическое изображение ряда распределения – полигон (или многоугольник) распределения вероятностей. Для того, чтобы построить полигон распределения, надо по оси OX откладывать значения случайной величины, а по оси OY – соответствующие вероятности.



19. Биномиальный закон распределения дискретной случайной величины

Дискретная случайная величина X распределена по биномиальному закону, если она может принимать только два значения.

Формула биномиального распределения $P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$.

Здесь n – общее число испытаний, m – число испытаний, в которых произошло событие A ; P – вероятность события A в каждом испытании; $q=p-1$ – вероятность неоявления события A (произошло второе событие B)

Ряд распределения выглядит так:

	0	1	2	...	n
X	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	p^n

Пример.

Лотерея. Вероятность выигрыша равна 0,2 для каждого билета. Составить таблицу закона распределения выигрыша для 5 билетов.

Решение.

Пусть X – число 5 – количество рассмотренных билетов. Значения случайной величины 0, 1, 2, 3, 4, 5. Соответствующие вероятности вычисляются по формуле Бернулли.

Получаем следующий ряд распределения:

X	0	1	2	3	4	5
	0,32768	0,4096	0,2048	0,0512	0,0064	0,00032

20. Закон Пуассона для дискретной случайной величины

Случайная величина X называется распределённой согласно закону Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если X может принимать значения

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

0, 1, 2, 3, ..., k , ... и

Здесь n – число независимых испытаний (оно велико), k – число появлений события в n испытаниях, P – вероятность появления события в каждом испытании (она очень мала), $\lambda = n \cdot p$ (среднее число появлений события в n испытаниях).

Т.е. ряд распределения Пуассона выглядит следующим образом:

X	0	1	...	k	...
	$e^{-\lambda}$	$\lambda \cdot e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$	...

Распределение Пуассона является предельным для биномиального распределения, когда $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ так, что $n \cdot p = \lambda$ – постоянно. Примерами случайных величин, имеющих распределение Пуассона, являются: число вызовов на телефонной станции за время t ; число опечаток в большом тексте; число бракованных деталей в большой партии. При этом считается, что события появляются независимо друг от друга с постоянной средней интенсивностью, характеризующейся параметром $\lambda = n \cdot p$.

21. Геометрический закон распределения дискретной случайной величины

Дискретная случайная величина *распределена геометрически*, если она принимает значения $1, 2, \dots, m \dots$ (бесконечное, но счётное количество раз) с вероятностями, находящимися по формуле общего члена геометрической прогрессии: $P(x=m)=p \cdot q^{m-1}$.

Законом распределения случайной величины называется любое правило (таблица, функция), позволяющее находить вероятности всевозможных событий, связанных со случайной величиной.

Случайная величина $X = m$, распределённая геометрически, представляет собой число испытаний m до первого положительного исхода.

Ряд распределения:

x_i	1	2	...	m	...
p_i	p	$p \cdot q$	...	$p \cdot q^{m-1}$	...

$P(X=1)=p, P(X=2)=p \cdot q$ и т.д.

Теорема. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределённой геометрически, вычисляются по формулам:

$$M(X) = \frac{1}{p}$$

$$D(X) = \frac{q}{p^2}$$

Пример.

Охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4-х выстрелов, вероятность попадания при одном выстреле равна $p = 0,7$.

Решение:

По условию $n \leq 4, p=0,7; q=1-0,7=0,3$

Составим закон распределения числа выстрелов в виде его ряда:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,7	0,21	0,063	0,027

22. Гипергеометрический закон распределения дискретной случайной величины

Гипергеометрическое распределение представляет собой частный случай биномиального распределения для конечной совокуп-

ности, состоящей из n объектов, причём m объектов обладают определённым свойством A .

Пусть из N объектов извлекаются (без возврата) n объектов, причём m объектов обладают свойством A . Тогда случайная величина X – число объектов, имеющих свойство A , – принимает значения: $0, 1, 2, \dots, m, \dots, n$.

Для вычисления вероятностей $P(X=m)$ формула Бернулли не подходит, так как отобранный объект не возвращается в исходную совокупность перед отбором следующего. Вероятность того, что m объектов имеют свойство A можно определить по формуле:

$$P(X = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

Ряд распределения имеет вид:

X	0	1	$\dots$	m	$\dots$	n
P	$\frac{C_M^0 \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$	$\frac{C_M^1 \cdot C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	$\dots$	$\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$	$\dots$	$\frac{C_M^n \cdot C_{N-M}^{n-n}}{C_N^n}$

Согласно таблице, можно записать функцию распределения случайной величины, распределённой по гипергеометрическому закону:

$$F(x) = \sum \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad 0 < x \leq n$$

23. Функция распределения вероятностей и её свойства

Функция распределения непрерывной случайной величины определяется как $F(x)$. $F(x) = P(X < x)$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее, чем переменная x , которая проходит через все значения от «минус» до «плюс» бесконечности.

Для дискретной случайной величины X , которая может принимать значения $x_1, x_2, \dots, x_n$, функция распределения имеет вид

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P\{X = x_i\}$$

где неравенство $x_i < x$ под знаком суммы означает, что суммирование распространяется на все те значения x_i , которые по своей величине меньше x .

Свойства функции распределения:

Свойство 1. Функция распределения непрерывна слева.

Свойство 2. Функция распределения есть неотрицательная функция, заключённая между нулём и единицей:

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$

Справедливость этого свойства вытекает из того, что функция распределения $F(x)$ определена как вероятность случайного события, состоящего в том, что $X < x$.

Свойство 3. Вероятность попадания случайной величины в интервал $[a, b]$ равна разности значений функции распределения на концах этого интервала, т. е.

$$P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a).$$

Отсюда следует, что вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю.

Свойство 4. Функция распределения случайной величины есть неубывающая функция, т. е. при $\beta > \alpha$ $F(\beta) > F(\alpha)$.

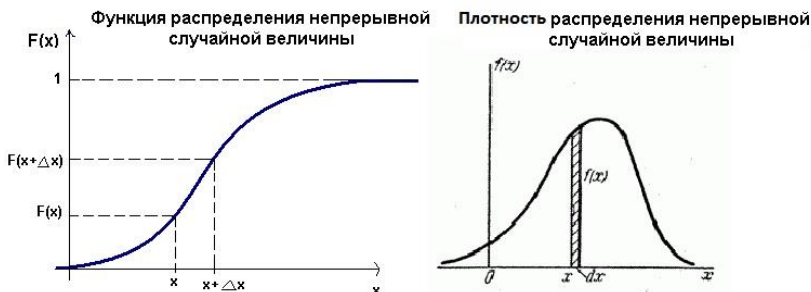
Свойство 5. На минус бесконечности функция распределения равна нулю, а на плюс бесконечности функция распределения равна единице, т. е. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

24. Понятия функции плотности и кривой распределения.

Свойства функции плотности

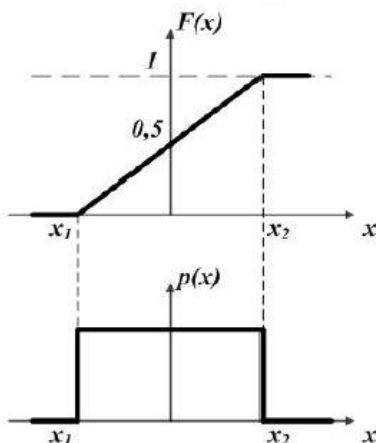
Непрерывную случайную величину, также как и дискретную, можно задать при помощи *функции распределения*

$$F(x) = P(X < x)$$



Функция распределения непрерывной случайной величины является непрерывной.

Непрерывная случайная величина также может быть задана при помощи функции, называемой *плотностью распределения* (или *плотностью вероятности*)



26. Математическое ожидание дискретной и непрерывной случайных величин. Вероятностный смысл математического ожидания

Математическим ожиданием случайной величины X называется сумма произведений всех её возможных значений на вероятности этих значений.

Математическое ожидание $M(X)$ дискретной случайной величины X равно сумме произведений всех возможных значений величины X на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = X_1 \cdot P_1 + X_2 \cdot P_2 + \dots + X_n \cdot P_n \quad \text{т.е.}$$

$$MX = \sum_i x_i p_i$$

где X_i — значение случайной величины,

P_i — вероятность принять это значение.

Математическое ожидание приблизительно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины, причём тем точнее, чем больше число испытаний — в этом состоит *смысл математического ожидания*.

Пример.

Найти среднее значение очков, выпадающих на игровом кубике.

Решение.

Пусть X — число очков на кубике при его броске. Требуется найти математическое ожидание $M(X)$ этой случайной величины.

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

Примечание: среднее значение случайной величины не обязано совпадать с одним из своих возможных значений.

Математическое ожидание иногда навывают *центром распределения случайной величины*, так как возможные значения случайной величины расположены на числовой оси слева и справа от её математического ожидания.

27. Свойства математического ожидания случайной величины

1. Математическое ожидание имеет ту же размерность, что и сама случайная величина.

2. Математическое ожидание может быть как положительным, так и отрицательным числом.

3. Математическое ожидание постоянной величины C равно этой постоянной. $M(C) = C$.

4. Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин.

$$M(X + Y + \dots + W) = M(X) + M(Y) + \dots + M(W).$$

5. Математическое ожидание произведения двух или нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин.

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

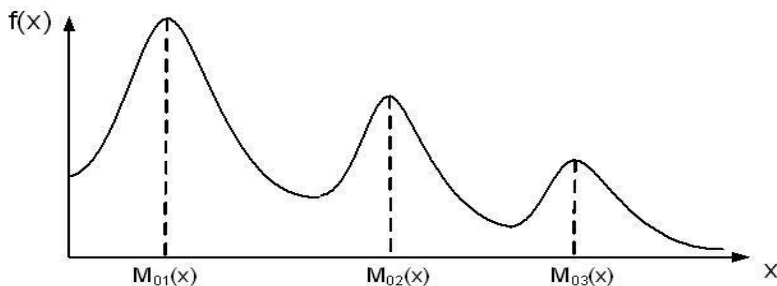
6. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(C \cdot X) = C \cdot M(X).$$

28. Понятие моды и медианы случайной величины

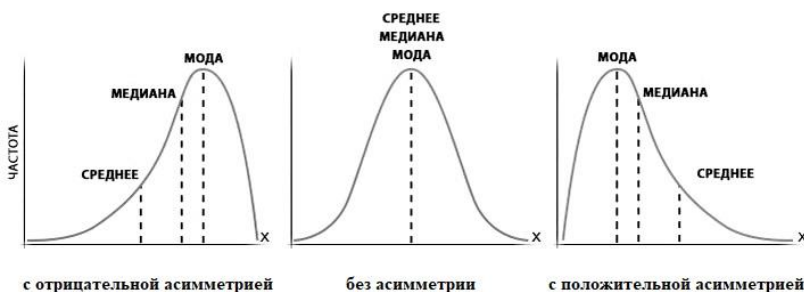
Модой случайной величины называется её наиболее вероятное значение. Для дискретной случайной величины модой является то значение x_i , для которого вероятность P_i является самой большой.

Если вероятность достигает максимума не в одной, а в нескольких точках, распределение называется *полимодальным* (многомодальным).



Медианой случайной величины X называется значение x_n , для которого одинаково вероятными оказываются следующие события:

$$"X < x_n" \text{ и } "X > x_n"$$



29. Понятие дисперсии и среднеквадратического отклонения случайной величины, свойства дисперсии

Дисперсия $D(X)$ дискретной случайной величины X – это математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от её математического ожидания:

$$D(X) = M [X - M(X)]^2.$$

Эта формула после возведения в степень и преобразований имеет вид:

$$D(X) = M (X^2) - M^2(X)$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 \cdot p_i$$

Свойства дисперсии:

Дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Дисперсия постоянной величины всегда равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат: $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$.

Дисперсия алгебраической суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

Среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$ дискретной случайной величины X определяется формулой

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}.$$

Среднее квадратическое отклонение есть мера рассеяния значений случайной величины около её математического ожидания.

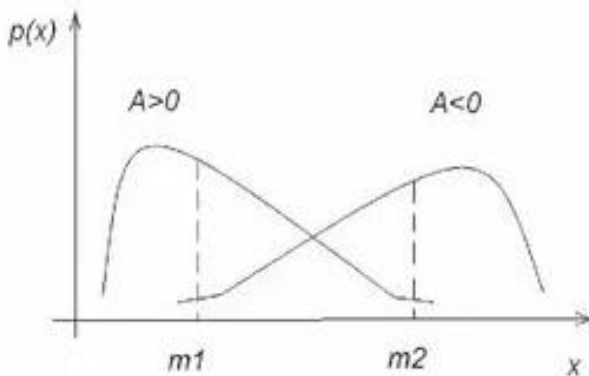
30. Коэффициент асимметрии случайной величины

Асимметрия (коэффициент асимметрии) случайной величины $As(X)$ – величина, характеризующая степень асимметрии распределения относительно математического ожидания.

Асимметрией теоретического распределения называется отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднего квадратического отклонения. Коэффициент асимметрии непрерывной случайной величины вычисляется по формуле:

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad As(X) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^3 \cdot f(x) dx}{\sigma^3}$$

Если коэффициент асимметрии отрицателен, то либо большая часть значений случайной величины, либо мода находятся левее математического ожидания, и наоборот, если $As(X) > 0$, то правее.

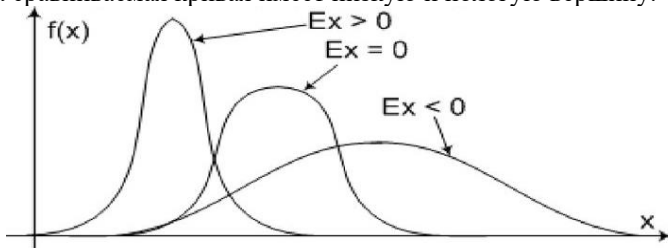


31. Коэффициент эксцесса случайной величины

Определение. Коэффициентом эксцесса (коэффициентом «островершинности») дискретной случайной величины X называется величина $Ex(X)$, вычисляемая по формуле:

$$Ex(X) = \frac{\mu_4}{(\sigma(X))^4} - 3 = \frac{M(X - MX)^4}{(DX)^2} - 3$$

Эксцесс характеризует «крутизну» кривой распределения по сравнению с нормальной кривой: если эксцесс положителен, то кривая имеет более высокую и острую вершину; в случае отрицательного эксцесса сравниваемая кривая имеет низкую и пологую вершину.



32. Функция Лапласа. Вероятность попадания нормально распределённой случайной величины на заданный интервал

Функция Лапласа имеет вид

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Свойства функции Лапласа:

- 1) функция $\Phi(x)$ нечётная: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.
- 2) функция $\Phi(x)$ монотонно возрастающая.
- 3) $\Phi(0)=0$.
- 4) $\Phi(+\infty)=0,5$; $\Phi(-\infty) = -0,5$. На практике можно считать, что при $x \geq 5$ функция $\Phi(x) = 0,5$; при $x \leq -5$ функция $\Phi(x) = -0,5$.

Для вычисления вероятности того, что нормально распределённая случайная величина X будет принимать значения в промежутке (a,b) используется формула:

$$P(\alpha \leq X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

33. Правило трёх сигм

При рассмотрении нормального закона распределения выделяется важный частный случай, известный как *правило трёх сигм*.

Запишем вероятность того, что отклонение нормально распределённой случайной величины от математического ожидания меньше заданной величины D:

$$P(|X - m| < \Delta) = \Phi\left[\frac{m + \Delta - m}{\sigma}\right] - \Phi\left[\frac{m - \Delta - m}{\sigma}\right] = \Phi\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right] - \Phi\left[-\frac{\Delta}{\sigma}\right] = 2\Phi\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right].$$

Т.е. вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидания на величину, большую чем утроенное среднее квадратичное отклонение, практически равна нулю.

Важность знаний по теории вероятностей для психологов

*Т.Н. Антошина, доцент кафедры
прикладной математики и информационных технологий,
кандидат педагогических наук*

Выявить закономерности в психологических исследованиях без математических методов невозможно.

Математика является важной частью науки, а психология, как таковая, использует её для достижения своих целей прогнозирования и контроля человеческого поведения. Для этой цели важно использовать вероятность, которая позволяет учёным иметь большую уверенность при прогнозировании действий людей.

Неофициально мы обычно думаем о вероятности как о числе, описывающем вероятность наступления некоторого события, которая варьируется от нуля (невозможность) до единицы (определённость). Вероятность можно обсуждать более расплывчато. Вероятность того, что сегодня пойдет дождь, невелика. Учитывая, что облаков нет, вероятность того, что сегодня пойдет дождь, невелика.

Теперь, чтобы понять важность вероятности в психологической науке, необходимо понять цели психологии. В связи с этим, такие психологи как Кун Д. и Миттерер Дж. сообщают нам, что психология преследует четыре цели, а именно: описание, понимание, прогнозирование и контроль поведения и психических процессов.

Важно, однако, хорошо понимать, что подразумевается под понятиями предсказания и контроля. Под предсказанием понимается способность с уверенностью предвидеть поведение, в то время как для контроля это будет просто пониматься как способность изменять условия, влияющие на поведение.

Поняв вышесказанное, можно сказать, что вероятность помогает как раз достичь третьей цели и это, в некотором смысле, основа четвёртого пункта. Другими словами, для того, чтобы психология могла прогнозировать и/или контролировать поведение в данный момент, необходимо уметь обобщать все конкретные данные, полученные в ходе исследований, и, следовательно, с достаточной степенью уверенности делать выводы о поведении, действии или ситуации.

Содержание

Теория множеств, комбинаторика и теория вероятностей для психологов	3
1. Понятие случайного события, виды событий. Пространство элементарных событий. Примеры	4
2. Совместные и несовместные события. Полная группа событий для данного испытания. Противоположные события. Примеры	5
3. Основные операции над случайными событиями. Примеры	6
4. Статистическое определение вероятности случайного события. Основные свойства вероятности события	8
5. Классическая формула определения вероятности	9
6. Комбинаторика и её основные правила	10
7. Основные элементы комбинаторики и их число	11
8. Теорема сложения вероятностей и её применение	12
9. Понятие условной вероятности события. Зависимые и независимые события	12
10. Теорема умножения вероятностей и её применение. Следствия	13
11. Формула полной вероятности	14
12. Априорные и апостериорные вероятности. Формулы Байеса	14

13. Определение испытаний Бернулли. Пример	15
14. Локальная теорема Муавра-Лапласа	16
15. Теорема Пуассона	16
16. Интегральная теорема Лапласа	17
17. Понятие случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Примеры	19
18. Закон распределения случайной величины. Ряд и многоугольник распределения дискретной случайной величины	19
19. Биномиальный закон распределения дискретной случайной величины	20
20. Закон Пуассона для дискретной случайной величины	21
21. Геометрический закон распределения дискретной случайной величины	22
22. Гипергеометрический закон распределения дискретной случайной величины	22
23. Функция распределения вероятностей и её свойства	23
24. Понятия функции плотности и кривой распределения. Свойства функции плотности	24
25. Нормальный и равномерный закон распределения непрерывной случайной величины	25
26. Математическое ожидание дискретной и непрерывной случайных величин. Вероятностный смысл математического ожидания	26

27. Свойства математического ожидания случайной величины	27
28. Понятие моды и медианы случайной величины	27
29. Понятие дисперсии и среднеквадратического отклонения случайной величины, свойства дисперсии	28
30. Коэффициент асимметрии случайной величины	29
31. Коэффициент эксцесса случайной величины	30
32. Функция Лапласа. Вероятность попадания нормально распределённой случайной величины на заданный интервал	30
33. Правило трёх сигм	31
Важность знаний по теории вероятностей для психологов	31

Составление, вступительная статья и компьютерная вёрстка:

Кабанов Андрей Александрович,
кандидат юридических наук, доцент,
e-mail: akabanov@inbox.ru



сайт: otvet-akab.ru

Авторский коллектив:

*Антошина Татьяна Николаевна, Кабанов Андрей Александрович, Пономарев
Лев Денисович, Саушкина Ирина Александровна*

Комбинаторика и теория вероятностей

Учебное пособие

ISBN 978-5-907724-35-8



9 785907 724358 >

Редакционная коллегия:

Т.Н. Антошина, А.А. Кабанов, А.В. Матвеев.

Компьютерная верстка: А.А. Кабанов

Печатается в авторской редакции

Не для продажи

Подписано в печать и свет 10.10.2023. Формат 60×84 1/16

Печать офсетная. Объём 2,25 п.л. Тираж 50 экз.

Отпечатано в ФГБОУ ВО СПбУ ГПС МЧС России
196105, Санкт-Петербург, Московский пр., д. 149.